Title	時間的ずれのある需要間の配分問題について(最適化理論とその関連分野)
Author(s)	石垣, 智徳; 澤木, 勝茂
Citation	数理解析研究所講究録 (1991), 747: 73-81
Issue Date	1991-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/102245
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 747 巻 1991 年 73-81

時間的ずれのある需要間の配分問題について

名古屋工業大学　石垣智徳　(Tomonori Ishigaki)
南　山　大　学　澤木勝茂　(Katsushige Sawaki)

1　はじめに

ホテルの空部屋、旅客機やコンサート等の座席などはそれぞれの業界で“在庫”と呼ばれている。これらの在庫品の特徴は、販売可能な総量が予め固定されていて売れ残った在庫を翌期に繰り越すことが不可能であることである。このように在庫を翌期に繰り越すことができないという物理的特性に対抗するために、これらの企業は同一の質の在庫品に対して複数の料金を設定し、比較的に早い時期に種々の割引券を発行して需要の確保を意図している。一方、利用者も同一の質の在庫品に対して種々の選好を有している。たとえば、旅客機をビジネス上の出張等で利用する場合と異なり、観光目的で利用する場合はできるだけ安い割引料金で比較的に早い時期に予約するのが通例である。

本稿では、予め販売可能な在庫量が固定しているとき、これらの在庫品に対して発生時点と収益性の違いからくる２種類の需要がある場合を想定し、この２種類の需要の間で在庫品をどうのように配分すればよいかの決定問題を考察する。

ここで取り扱う在庫に対する２種類の需要を次のように定義する。早い時期に発生する需要を“早い需要”と呼び、その収益性は低い。一方、遅くれて発生する需要を“遅い需要”と呼び、その収益性は高い。ここでの在庫品の特徴は、スペース(空間) を売ることであるため、翌期に繰り越しすることができないことと、満たされなかった需要は永遠に失われることである。この種の在庫品を取り扱う企業は、低い料金で商品を早い時期に提供することによって需要を掘り起こし、しかし、このことによって高い収益をもたらす需要を逃すことなく最終的な期待収益を最大にするような管理政策を求めようとするのである。本稿では、このタイプの決定問題

を一般的な形で期待収益を最大にする問題として定式化する。ここで得られた知見は、収益性の高い需要が将来に遅れて実現すると期待されるならば、収益性の低い早い需要に対する在庫品の配分量に上限を設定することが望ましいということである。この知見は、季節物商品などピーク時を過ぎた場合に催されるバーゲン・セールにも適用可能である。バーゲン・セールのとき販売可能数量 (在庫量) に上限を設けて先着順何名までという販売戦略がしばしば採用される。この販売戦略の精神は、ピーク時を過ぎた需要を喚起すると共に類似の商品を通常の価格で購入しても良いと思っている客が、バーゲン商品の購入に移行するのを防止するためと見なすことができる。

Beckmann [1], Rothstein [4] および Sawaki [5] は旅客機の座席管理について類似の議論を展開している。旅客機の座席管理および収益管理の展望について、Belobaba [2] または沢木 [6] が行っている。ホテルの部屋の在庫管理については Liberman and Yechiali [3] と石垣 [7] が考察している。これらの従来のモデルは、2 種類の需要の独立性を仮定しているが、本稿ではそのような独立性を仮定しない。従って、割引価格によって購入することができなかった早い需要が、普通価格で購入することを意図して、遅い需要に移行する可能性を認めている。

次節では、モデルの定式化を行った後で最適な在庫管理政策について分析する。特に、簡単な最適政策が存在するための十分条件について考察する。第 3 節では、需要分布を特定化したとき、このモデルの最適な在庫管理政策について詳しく議論しよう。第 4 節では、このモデルで得られた知見をまとめるとともに、モデルの応用範囲と将来の拡張の方向について言及する。

2 モデルの定式化と最適な在庫管理政策

いま販売可能な在庫品の総量を C で表し、固定的な既知の値とし、次に述べる遅い需要の単位で表現されたものとする。この在庫品に対して 2 種類の需要を X,Y とし、それぞれ早く実現する需要 (早い需要) 及び遅く実現する需要 (遅い需要) と呼ぶことにする。計画期間のはじめで X および Y は確率変数であり、X の分布関数を $F(x)$, $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き分布を $G(y|x)$ とする。決定変数を I とし、早い需要に配分される在庫量の上限とする。すなわち、早い需要からの売上量は $\min\{I, X\}$ となる。したがって、遅い需要への在庫の配分量を $Q(I)$ とすれば、

$$Q(I) = C - \alpha \min\{I, X\} \tag{1}$$

となる。ただし、ここで α は早い需要 1 単位の遅い需要への換算率で、$\alpha \geq 0$ である。$\alpha = 1$ ならば、早い需要 1 単位は遅い需要 1 単位に等しく、$0 \leq \alpha < 1$ ならば、返品やオーバーブッキングの場合を想定する。旅客機の場合、早い需要を団体客のエコノミー席とし、遅い需要を個人客のビジネス席として座席のサイズを変更することが可能ならば、たとえば $\alpha = 2/3$ となる。さらに次のような記号を使用する。

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \text{早い需要への単位価格} \\
p_2 &= \text{遅い需要への単位価格} \\
h &= \text{売れ残った在庫品の単位保持費用} \\
s_1 &= \text{早い需要への単位当り品切れ費用} \\
s_2 &= \text{遅い需要への単位当り品切れ費用}
\end{aligned}
$$

仮定 1　$0 < p_1 + s_1 < \alpha(p_2 + s_2)$

早い需要の収益性を遅い需要の収益性よりも小さいことを保証するために $p_1 < \alpha p_2, s_1 < \alpha s_2$ と仮定してもよいが、以下の最適な在庫管理政策を得るためには上記の仮定 1 で十分である。

早い需要に対して I 単位の在庫量を配分したときの総期待利潤を $T(I)$ とすれば、$T(I)$ は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
T(I) &= p_1 E[\min\{X, I\}] + p_2 E E_{Y|X}[\min\{Y, Q(I)\}] \\
&- hEE_{Y|X}[\max\{Q(I) - Y, 0\}] - s_1 E[\max\{X - I, 0\}] \\
&- s_2 E E_{Y|X}[\max\{Y - Q(I), 0\}] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

問題は条件 $0 \leq \alpha I \leq C$ の下で総期待利潤を最大にするように早い需要と遅い需要の間に在庫量 C を配分することである。2 つの需要の間で最適な在庫の配分量を求めるために次の仮定 2 を用意しよう。

仮定 2　$P[Y \geq C - \alpha I | X \geq I]$ は I の単調増加関数である。

補助定理 1　仮定 1,2 の下で、$T(I)$ は I の単峰型である。

証明： (2) 式の $T(I)$ を I に関して微分すれば、

$$
\frac{dT(I)}{dI} = \overline{F}(I)\{(p_1 + s_1 + \alpha h) - \alpha(p_2 + s_2 + h)P[Y > C - \alpha I | X \geq I]\} \qquad (3)
$$

を得る。明らかに $\overline{F}(I) \geq 0$ であるから、上式の符号は右辺のカッコ { } の中の値によって決まる。仮定 1 より $(p_1 + s_1 + \alpha h) < \alpha(p_2 + s_2 + h)$ であり、仮定 2 より $P[Y \geq C - \alpha I | X \geq I]$ は I の単調増加関数であるから $dT(I)/dI$ の符号は正から負に一回変化する。すなわち、$dT(I)/dI = 0$ となる I^* が存在して、$I < I^*$ では $T(I)$ は I の増加関数であり、$I > I^*$ では I の減少関数である。よって、$T(I)$ は I の単峰型である。

(Q. E. D.)

補助定理 1 より、単峰型 $T(I)$ を最大にする I^* は次の定理によって与えられる。

定 理 1　すべての I について $F(I) < 1$ で $P[Y > C] \leq (p_1+s_1+\alpha h)/\alpha(p_2+s_2+h)$ かつ $P[Y > (1-\alpha)C | X \geq C] \geq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ と仮定する。仮定 1,2 の下で早い需要に対する在庫の最適な配分量 I^* は次式によって与えられる。

$$I^* = \max\{0 \leq \alpha I \leq C | P[Y > C - \alpha I | X \geq I] \leq \frac{p_1 + s_1 + \alpha h}{\alpha(p_2 + s_2 + h)}\} \tag{4}$$

証明： 条件 $F(I) < 1$ によって $dT(I)/dI = 0$ となる I は (3) 式より

$$\alpha(p_2 + s_2 + h)P[Y > C - \alpha I | X \geq I] - (p_1 + s_1 + \alpha h) = 0 \tag{5}$$

を満たす。条件 $P[Y > C] \leq (p_1+s_1+\alpha h)/\alpha(p_2+s_2+h)$ かつ $P[Y > (1-\alpha)C | X \geq C] \geq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ の下で仮定 1,2 より (5) 式を満足する I が少なくとも 1 つ存在する。したがって、補助定理 1 より $T(I)$ を最小にする I は (4) 式によって与えられる。

(Q. E. D.)

(注 1) 定理 1 において、もし $P[Y > C] \geq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ ならば、最適な在庫の配分量は $I^* = 0$ となる。これは、高い収益を生む遅い需要が総在庫量よりも大きい確率が早い需要の相対的な価格よりも大きいならば、早い需要への在庫の配分量は 0 であることを意味している。逆に、もし $P[Y > (1-\alpha)C | X \geq C] \leq (p_1+s_1+\alpha h)/\alpha(p_2+s_2+h)$ ならば、$I^* = C$ となる。この場合は、早い需要が十分あるという情報の下で、遅い需要がある一定量 $(1-\alpha)C$ 以上で確率が早い需要の相対的な価格よりも小ならば、総在庫量をすべて早い需要に配分せよと主張している。

(注 2) 定理 1 の (4) 式を注意深く観察すれば、早い需要への在庫の最適な配分量 I^* は、早い需要と遅い需要の価格比 $(p_1+s_1+\alpha h)/\alpha(p_2+s_2+h)$ のみに依存して、各々の p_1, p_2, s_1, s_2 の値には依存しない。

(注 3)$P[Y > C - I|X \geq I]$ は C の減少関数であるから、I^* は C の増加関数である。

X と Y が互いに独立ならば定理 1 は次の系 1 のごとく退化する。特に、最適な配分量が明示的な型で与えられる。

系 1　もし $\alpha = 1$ でかつ Y と X が互いに独立で Y の分布 $G(\cdot)$ が厳密な増加関数ならば、早い需要への最適な在庫配分量 I^* は

$$I^* = \left\{ \begin{array}{ll} C, & \overline{G}(0) \geq \frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)} \text{のとき} \\ C - \overline{G}^{-1}\left(\frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)}\right), & \overline{G}(0) < \frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)} < \overline{G}(C) \text{のとき} \\ 0, & \overline{G}(C) \leq \frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)} \text{のとき} \end{array} \right\} \tag{6}$$

となる。ただし、$\overline{G} = 1 - G$ である。

(注 1)X と Y が互いに独立ならば、$T(I)$ が単峰型になるために仮定 1 を必要としない。したがって、最適な在庫の配分量 I^* は仮定 1,2 が成立しなくても系 1 のように与えられる。一方、遅い需要への配分量は $C - I^* = \overline{G}^{-1}(\frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)})$ となって、C と F から独立である。

(注 2) 定理 1 の (注 3) で I^* が C の増加関数であることを言及したが、系 1 では、比率 I^*/C もまた C の増加関数である。

(注 3) 系 1 のように X と Y が互いに独立ならば、早い需要への最適な在庫の配分量は早い需要の分布関数 $F(\cdot)$ から独立であって、遅い需要の分布関数 $G(\cdot)$ と 2 つの需要の価格比のみに依存する。

3　いくつかの例題

この節では、第 2節のモデルの特別な場合や需要の分布関数を特定化した場合について議論する。

例題 1– 早い需要が十分にある場合

$I \leq C$ なるすべての I に対して $\Pr(X > I) = 1$ と仮定しよう。このとき $\Pr[Y > C - I|X > I] = \Pr[Y > C - I] = \overline{G}(C - I)$ となる。$\alpha = 1$ のとき、(2) 式の $T(I)$

は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
T(I) &= p_1 I + p_2 E[\min\{Y, C-I\}] \\
&- hE[\max\{C-I-Y, 0\}] - s_1 E[X-I] \\
&- s_2 E[\max\{Y-C-I, 0\}]
\end{aligned} \tag{7}
$$

上式の右辺において、第1項は I の線形であり、その他の項はすべて I の凹関数であることが判る。従って、$T(I)$ は I の凹関数である。条件 $0 \le I \le C$ の下で $T(I)$ を最大にする I を求めるために、その導関数を計算すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dT(I)}{dI} &= p_1 - p_2 P[Y > C-I] + hP[Y < C-I] + s_1 - s_2 P[Y > C-I] \\
&= (p_1 + s_1 + h) - (p_2 + s_2 + h) P[Y > C-I]
\end{aligned}
$$

故に、仮定1の下で最適な在庫の配分量 I^* は

$$
I^* = C - \overline{G}^{-1}\left(\frac{p_1 + s_1 + h}{p_2 + s_2 + h}\right) \tag{8}
$$

となる。(8) 式で与えられる I^* は定理1の (4) 式および系1の (6) 式と基本的には同類であるが、(8) 式の I^* は仮定2を必要としないことである。

例題 2– 需要が 2 変量正規分布に従う場合

ここでは $\alpha = 1$ とする。X と Y が2変量正規分布に従い、X と Y の相関係数が非負ならば、仮定2が成立することは容易に確認できる。直観的な説明は次のようになる。明らかに、$\Pr[Y \ge C-I]$ は I の増加関数である。X と Y の間に非負の相関関係があるとき、$X \ge I$ であるという情報は、$\Pr[Y \ge C-I | X \ge I]$ の単調性を逆転させない。ここでは、2種類の需要の相関係数が0である場合と正である場合について、最適な在庫の配分量を数値的に求めてみよう。

X と Y の平均及び標準偏差をそれぞれ $\mu_X = 70$ 、$\mu_Y = 30$ 、$\sigma_X = 26.5$ 、$\sigma_Y = 11.5$ 、とし、相関係数は $\rho = 0$ と $\rho = 0.9$ の2つ場合を考える。価格や費用については、その比率のみが意味を持つから、$(p_1+s_1+h)/(p_2+s_2+h) = 0.6$ とする。表1は、総在庫量が $46, 60, 80, 100, 120, 140$ 単位である種々の値の場合について、早い需要と遅い需要に対する最適な在庫の配分量を表している。表1を観察すると、$\rho = 0$ の場合、総在庫量の値にかかわらず遅い需要への配分量は常に27単位の定量となっている。この数値例ではと相対価格の比率のみによって決まるからである。$\rho = 0.9$ である場合の最適な早い需要への配分量 I^* は、$\rho = 0$ である場合の I^* を超過する

表 1: 最適な在庫の配分量 $(I^*, C-I^*)$

ρ	C 46	60	80	100	120	140
0 である場合 (ρ=0)	(19, 27)	(33, 27)	(53, 27)	(73, 27)	(93, 27)	(113, 27)
正である場合 (ρ=0.9)	(19, 27)	(32, 28)	(49, 31)	(65, 35)	(81, 39)	(97, 43)
$I^*/C(\rho=0)$	0.41	0.55	0.66	0.73	0.77	0.80
$(\rho=0.9)$	0.41	0.53	0.61	0.65	0.67	0.69

ことはない。これは直観的に次のように考えられる。X と Y の間に正の高い相関関係があるから、$X \geq I$ という情報は収益性の高い遅い需要が大である可能性を示唆する。従って、$\rho = 0.9$ である場合には、早い需要（低い収益性）への在庫の配分量は小さくなる。2 節の結果から、最適な配分量 I^* は C の増加関数である。I^*/C もまた C の増加関数であることが判る。さらに、$\rho = 0.9$ である場合の比率 I^*/C は $\rho = 0$ である場合のそれを下回っている。

例題 3– 需要が指数分布に従う場合

X が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従い、$Y = X/\beta, \beta > 0, \alpha = 1$ とする。早い需要の $(1/\beta)$% が遅い需要を形成すると見做そう。 $Pr[Y > C-I|X \geq I] = e^{-\beta\lambda C}e^{\lambda(\beta+1)I}, I \leq \beta C/(1+\beta)$ 、その他の正の I に対しては 1 とする。明らかに I の増加関数であるから、仮定 2 を満足する。故に、定理 1 より

$$I^* = \frac{\beta}{\beta+1}C + \log(\frac{p_1+s_1+h}{p_2+s_2+h})^{\frac{1}{\lambda(\beta+1)}} \tag{9}$$

となって、$I^* \leq C$ を満たす。一方、X と Y が独立であるとすれば

$$\begin{aligned} P[Y > C-I] &= P[X > \beta(C-I)] \\ &= e^{-\lambda\beta(C-I)} \end{aligned}$$

となり、独立の場合の最適な在庫の配分量を I^{**} とすれば、系 1 より

$$I^{**} = C + \log(\frac{p_1+s_1+h}{p_2+s_2+h})^{\frac{1}{\lambda\beta}} \tag{10}$$

となる。(9)、(10) 式を比較すれば、$\beta > 0$ 、仮定 1 の下で

$$I^* < I^{**}$$

を得る。これは例題 2 の 2 変量正規分布の場合の結論と一致する。

4 おわりに

本稿では、発生時期に違いのある2種類の需要に対して固定的な総在庫量をどのように配分すれば良いかについて分析した。収益性の高い遅い需要が将来に期待されるとき、収益性の低い早い需要への在庫の配分量に上限を設定することにより総在庫量の配分から獲得される期待収益を最大にすることが可能であることを示した。早い需要と遅い需要の間に確率的な依存関係がある場合、条件付分布関数にある種の単調性が成立するならば（仮定2）、早い需要への最適な在庫の配分量 I^* が

$$I^* = \max\{0 \leq \alpha I \leq \alpha C | P[Y \geq C - \alpha I | X \geq I] \leq \frac{p_1 + s_1 + \alpha h}{\alpha(p_2 + s_2 + h)}\}$$

で与えられる。早い需要の中で在庫品を購入できなかった客がより高い価格で遅い需要として在庫品を購入する可能性があるならば、このように、収益性の低い早い需要に対して在庫品の配分量に上限を設けることは我々の経済的直観とも一致する。ここで取り扱ったモデルは1期間の静的モデルであって、早い需要が実現される過程を観察しつつ、在庫量の配分の上限を修正・更新するような動的な在庫管理モデルではない。在庫量の減少を絶えずモニターしながら在庫の配分の上限を逐次に改定するようなモデルが次に考えられるであろう。さらに、モデルの拡張方向として、単に2種類の需要だけでなく、より一般に N 種類の需要が存在するとき各需要への在庫量の配分政策を議論することである。いずれの場合もここで取り扱ったモデルよりも複雑で難解なモデルであるが、在庫の繰越しが認められず総在庫量が固定しているよう商品を販売する企業にとっては重要で現実的な問題であると言わなければならない。

参考文献

[1] Beckmann, M. J., "Decision and Team Problems in Airline Reservations", *Econometrica 26*, 134-145 (1958).

[2] Belobaba, P. P., "Airline Yield Management: An Overview of Seat Inventory Control", *Transportation Science 21:2*, 63-73 (1987).

[3] Liberman, V. and U. Yechiali, "On the Hotel Overbooking Problem-An Inventory System with Stochastic Cancellations", *Management Science 24;11*, 1117-1126 (1978).

[4] Rothstein, M., "An Airline Overbooking Model", *Transportation Science* 5, 180-192 (1971).

[5] Sawaki, K., "An Analysis of Airline Seat Allocation," *Journal of Operations Research Society of Japan*, 32:4, 411-419 (1989).

[6] 沢木勝茂、「割引航空券と座席予約管理モデル」 オペレーションズ・リサーチ, 34, 337-339 (1989).

[7] 石垣智徳、「ホテルの過剰予約問題とその最適政策」 南山論集第 17 号経済・経営編 (1989).